## Exercice 1 :

Soient deux torseurs $[T_1]_A$ et $[T_2]_A$ définis au même point $A$ par leurs éléments de réduction dans un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ :

$$[T_1]_A = \begin{cases} \vec{R_1} = -3\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 2\,\vec{k} \\ \vec{M_{1A}} = 4\,\vec{i} - \vec{j} - 7\,\vec{k} \end{cases} \quad \text{et} \quad [T_2]_A = \begin{cases} \vec{R_2} = 3\,\vec{i} - 2\,\vec{j} - 2\,\vec{k} \\ \vec{M_{2A}} = 4\,\vec{i} + \vec{j} + 7\,\vec{k} \end{cases}$$

1) Déterminer l'axe central et le pas du torseur $[T_1]_A$ ;
2) Déterminer l'automoment du torseur $[T_1]_A$ , montrer qu'il est indépendant du point $A$ ;
3) Construire le torseur $[T]_A = a[T_1]_A + b[T_2]_A$ avec $a$ et $b \in IR$ ;
4) Quelle relation doivent vérifier a et b pour que le torseur $[T]_A$ soit un torseur couple ;
5) Montrer que le torseur couple est indépendant du point ou on le mesure ;
6) Déterminer le système le plus simple de vecteurs glissants associés au torseur somme : $[T_1]_A + [T_2]_A$

## Solution :

1) Axe central et Pas du torseur $[T_1]_A$

*Axe central :* Il est défini par l'ensemble des points $P$ tel que : $\vec{OP} = \dfrac{\vec{R_1} \wedge \vec{M_{1A}}}{R_1^2} + \lambda \vec{R_1}$

$$\vec{OP} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} -12 \\ -13 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{12}{17} - 3\lambda \\ -\frac{13}{17} + 2\lambda \\ -\frac{5}{17} + 2\lambda \end{pmatrix}$$

*Pas du torseur* $[T_1]_A$ : $P_1 = \dfrac{\vec{R_1} \bullet \vec{M_{1A}}}{R_1^2} = \dfrac{1}{17}\left(-3\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 2\,\vec{k}\right) \bullet \left(4\,\vec{i} - \vec{j} - 7\,\vec{k}\right) = -\dfrac{28}{17}$

2) Automoment du torseur $[T_1]_A$ : $\vec{R_1} \bullet \vec{M_{1A}} = \left(-3\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 2\,\vec{k}\right) \bullet \left(4\,\vec{i} - \vec{j} - 7\,\vec{k}\right) = -28$

L'automoment est indépendant du point $A$. En effet, d'après la formule de transport nous pouvons écrire : $\vec{M}_A = \vec{M}_B + \vec{AB} \wedge \vec{R}_1 \Rightarrow \vec{R}_1 \bullet \vec{M}_A = \vec{R}_1 \bullet \vec{M}_B + \vec{R}_1 \bullet \left(\vec{AB} \wedge \vec{R}_1\right)$

$\vec{R}_1 \bullet \vec{M}_A = \vec{R}_1 \bullet \vec{M}_B$ , on voit bien qu'il est indépendant du point $A$.

**3)** $[T]_A = a[T_1]_A + b[T_2]_A \Leftrightarrow [T]_A = \begin{cases} R = a\vec{R}_1 + b\vec{R}_2 \\ \vec{M}_A = a\vec{M}_{1A} + b\vec{M}_{2A} \end{cases}$

$$[T]_A = \begin{cases} \vec{R} = -3(a-b)\,\vec{i} + 2(a-b)\,\vec{j} + 2(a-b)\,\vec{k} \\ \vec{M}_{1A} = 4(a+b)\,\vec{i} - (a-b)\,\vec{j} - 7(a-b)\,\vec{k} \end{cases}$$

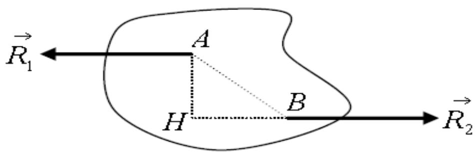
**4)** Condition pour que $[T]_A$ soit un torseur couple :

il faut que la résultante soit nulle : $\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow a = b$

Le moment dans ce cas sera égal à : $\vec{M}_{1A} = 4(a+b)\,\vec{i} = 8a\,\vec{i}$

**5)** Le moment d'un torseur couple où les résultantes $\vec{R}_1$ , $\vec{R}_2$ ont le même module mais de sens opposées et appliquées aux points quelconque $A$ et $B$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{M}_A &= \vec{OA} \wedge \vec{R}_1 + \vec{OB} \wedge \vec{R}_2 = \vec{OA} \wedge \vec{R}_1 + \vec{OB} \wedge (-\vec{R}_1) \\ &= \vec{BA} \wedge \vec{R}_1 = \left(\vec{BH} + \vec{HA}\right) \wedge \vec{R}_1 \\ &= \vec{HA} \wedge \vec{R}_1 = -\vec{AH} \wedge \vec{R}_1 = \vec{AH} \wedge \vec{R}_2 \end{aligned}$$




Le moment d'un couple est indépendant de la distance entre les points A et B , il dépend uniquement de la distance qui sépare les deux droites supports des résultantes. Cette distance est appelée bras de levier.

**6)** Système simple de vecteurs glissants associés au torseur somme : $[T_1]_A + [T_2]_A$

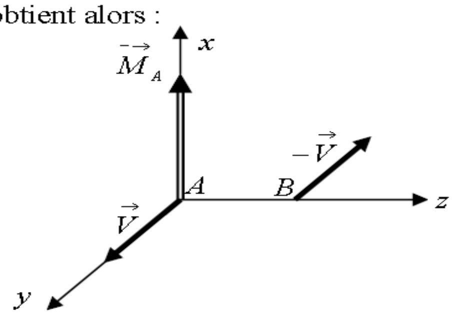
Le torseur somme $[T]_A$ est donné par : $[T]_A = \begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_A = 8\,\vec{i} \end{cases}$

La résultante peut être décomposées en deux vecteurs quelconque de même module et de sens opposé dont l'un des vecteurs est placé au point $A$, on obtient alors :

$\vec{M}_A = \vec{AA} \wedge \vec{V} + \vec{AB} \wedge -\vec{V} = \vec{AB} \wedge -\vec{V} = 5\,\vec{i}$

système de deux vecteurs glissants : $\left(A,\ \vec{V}\right)$

et $\left(B,\ -\vec{V}\right)$ , tel que : $\vec{V} \bullet \vec{M}_A = 0$



## *Exercice 2 :*

Soit le torseur $[T_1]_O$ défini par les trois vecteurs $\vec{V_1} = -2\,\vec{i} + 3\,\vec{j} - 7\,\vec{k}$ ; $\vec{V_2} = 3\,\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ , $\vec{V_3} = -\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 8\,\vec{k}$ définis dans un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ respectivement au points $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ ; et le torseur $[T_2]_O = \begin{cases} \vec{R_2} \\ \overrightarrow{M_{20}} \end{cases}$ où $\vec{R_2} = 2\,\vec{i} + \vec{j} + 3\,\vec{k}$ et $\overrightarrow{M_{20}} = -3\,\vec{i} + 2\,\vec{j} - 7\,\vec{k}$ .

**1)** Déterminer les éléments de réduction du torseur $[T_1]_O$ , conclusion;

**2)** Déterminer le pas et l'axe central du torseur $[T_2]_O$ ;

**3)** Calculer la somme et le produit des deux torseurs ;

**4)** Calculer l'automoment du torseur somme .

---

## *Solution :*

### 1) Eléments de réduction du torseur: $[T_1]_O = \begin{cases} \vec{R_1} = \vec{V_1} + \vec{V_2} + \vec{V_3} \\ \overrightarrow{M_{1O}} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{V_1} + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{V_2} + \overrightarrow{OC} \wedge \vec{V_3} \end{cases}$

$$\vec{R_1} = \vec{V_1} + \vec{V_2} + \vec{V_3} = \vec{0}$$

---

$$\overrightarrow{M_{1O}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{i} + 6\,\vec{j}$$

$$[T_1]_O = \begin{cases} \vec{R_1} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{1O}} = \vec{i} + 6\,\vec{j} \end{cases}$$

---

## 2) Pas et axe central du torseur $[T_2]_O$

*Pas du torseur :* $P_2 = \dfrac{\vec{R}_2 \bullet \vec{M}_2}{R_2^2} = \dfrac{\left(2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}\right)\bullet\left(-3\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k}\right)}{4+1+9} = \dfrac{-3+2-21}{14} = -\dfrac{11}{7}$

*Axe central du torseur :* $\vec{OP} = \dfrac{\vec{R}_2 \wedge \vec{M}_2}{R_2^2} + \lambda \vec{R}_2$

$$\vec{OP} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-3\\2\\-7\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}-13\\5\\7\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\dfrac{13}{14}+2\lambda\\ \dfrac{5}{14}+\lambda\\ \dfrac{1}{2}+3\lambda\end{pmatrix}$$

## 3) Somme et produit des deux torseurs

### *a) Somme des deux torseurs :*

$$[T]_O = [T_1]_O + [T_2]_O = \begin{cases}\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}\\ \vec{M}_O = \vec{M}_{1O} + \vec{M}_{2O} = -2\vec{i} + 8\vec{j} - 7\vec{k}\end{cases}$$

### *b) Produit des deux torseurs :*

$$[T_1]_O \bullet [T_2]_O = \begin{cases}\vec{R}_1\\ \vec{M}_{1O}\end{cases} \bullet \begin{cases}\vec{R}_2\\ \vec{M}_{2O}\end{cases} = \vec{R}_1 \bullet \vec{M}_{2O} + \vec{R}_2 \bullet \vec{M}_{1O} = \left(2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}\right)\bullet\left(-3\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k}\right) = -25$$

## 4) Automoment du torseur somme :

$$F = \vec{R} \bullet \vec{M}_O = \left(2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}\right)\bullet\left(-2\vec{i}+8\vec{j}-7\vec{k}\right) = -17$$